Mohó stratégia

2. előadás

Mohó stratégia

A mohó stratégia elemei

1. Fogalmazzuk meg az optimalizációs feladatot úgy, hogy választások sorozatával építjük fel a megoldást!
2. Mohó választási tulajdonság: Mutassuk meg, hogy mindig van olyan megoldása az eredeti feladatnak, amely a mohó választással kezdődik!
3. Optimális részprobléma tulajdonság: Bizonyítsuk be, hogy a mohó választással olyan redukált problémát kapunk, amelynek optimális megoldásához hozzávéve a mohó választást, az eredeti probléma megoldását kapjuk!

Az előadás Horváth Gyula tananyagai felhasználásával készült.

Hátizsák – Mohó stratégia

Hátizsák probléma

N-féle anyagot kell egy hátizsákba pakolni (darabolni is lehet), V_i az anyag értéke, W_i a súlya, a hátizsákba H súly fér, a lehető legnagyobb értéket kell elvinni.

Rendezzük az anyagokat V_i/W_i relatív érték szerint! Lássuk be, hogy e sorrend szerint folyamatosan kell vennünk, amíg lehet, esetleg az utolsónak csak egy részét!

Hátizsák – Mohó stratégia

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy az első anyagból 1 kg-mal kevesebbet te-szünk a hátizsákba! Ekkor az össz-érték V_1/W_1 –gyel csökken.

Ha bármely későbbiből veszünk 1 kg-ot, akkor az össz-érték V_i/W_i –vel nő, de mivel $V_1/W_1 \geq V_i/W_i$, ezért az össz-érték így nem lehet nagyobb!

Hátizsák – Mohó stratégia

Hátizsák probléma

Ha az egyes anyagok nem darabolhatók, akkor a feladat mohó stratégiával nem oldható meg. Ellenpélda a mohó stratégiára:

$W_1=10$, $V_1=60$, $V_1/W_1=6$

$W_2=20$, $V_2=100$, $V_2/W_2=5$

$W_3=30$, $V_3=120$, $V_3/W_3=4$

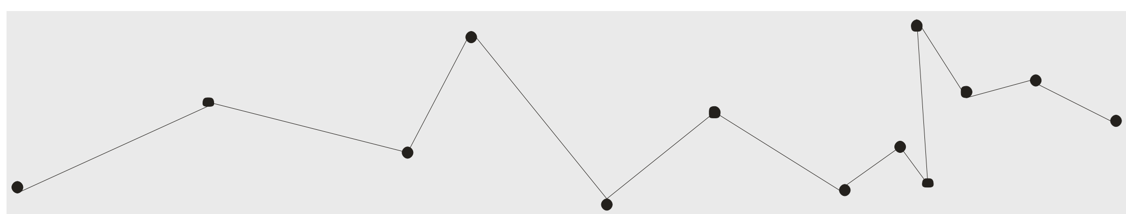
Hátizsák kapacitás: 50

Ekkor a mohó megoldás: (1 és 2) 160, pedig a jó megoldás (2 és 3) 220.

Benzinkút – Mohó stratégia

Benzinkút probléma

Egy útvonalon N benzinkút található. Ismerjük az egyes benzinkutak távolságát, valamint azt, hogy tele tankkal az autónk hány kilométert tud megtenni (K)! Számold ki, hogy minimum hány helyen kell tankolnunk, s mondd is meg, hogy mely benzinkutaknál!



Benzinkút – Mohó stratégia

A megoldás a benzinkutak halmazának egy B_1, …,B_k részhalmaza, ahol $Táv(B_{i+1})-Táv(B_i) \leq K$ és $Táv(N)-Táv(B_k) \leq K$.

Ami nem kérdés: a kezdőpontban (azaz az 1. benzinkútnál) tankolni kell, azaz $B_1=1$.

Ami szintén nem kérdéses: a célpontban már nem kell tankolni!

Mohó választás: Mindig a lehető legkésőbb tankoljunk, azaz B_2 legyen az a benzinkút, amelyre $Táv(B_2)-Táv(B_1) \leq K$, de $Táv(B_2+1)-Táv(B_1) > K$.

Benzinkút – Mohó stratégia

Bizonyítás: Ha korábban (valamely j sorszámú benzinkútnál) tankolnánk, akkor 2 lehetőség van:

Táv(B_3)-Táv(j)$\leq$K $\rightarrow$ ugyanolyan számú tankolással célba érhetünk.

Táv(B_3)-Táv(j)>K $\rightarrow$ másodszor is hamarabb kell tankolnunk, ekkor a megoldás a további tankolási helyektől függ,

…

Azaz ha nem mohó módon választunk, akkor a tankolások száma vagy nem változik, vagy nagyobb lesz!

Benzinkút – Mohó stratégia

```
Benzinkút(N,Táv,db,B):
  db:=1; B(db):=1
  Ciklus i=2-től N-1-ig
    Ha Táv(i+1)-Táv(B(db))>K
       akkor db:=db+1; B(db):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Megjegyzés: Ha Táv(N)-Táv(B(db))>K, akkor nincs megoldás.

Staféta – Mohó stratégia

Staféta

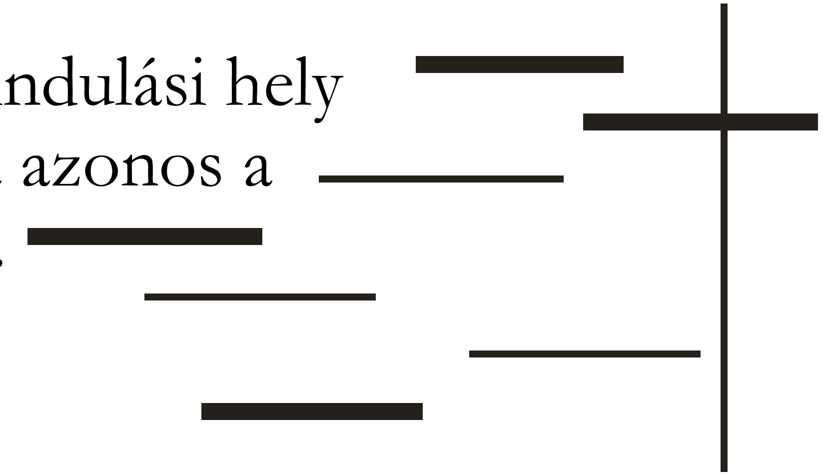
Az olimpiai lángot egy kiindulási városból a cél városba kell eljuttatni. A két város távolsága K kilométer. A szervezők meghirdették, hogy olyan futók jelentkezését várják, akik pontosan H kilométert futnak az olimpiai lánggal. Sok futó jelentkezett, mindegyik megadta, hogy hányadik kilométertől vállalja a futást. A szervezők ki akarják választani a jelentkezők közül a lehető legkevesebb futót, akik végigviszik a lángot.

Staféta – Mohó stratégia

Ha egy futó az x kilométertől fut, akkor minden olyan futó át tudja venni tőle a lángot, aki olyan z kilométertől vállalja a futást, hogy $z \leq x+H$.

A kiindulási városból biztosan indulni kell egy futónak. A megoldás a futók egy olyan $F_1, \ldots, F_k$ részhalmaza, amikor minden futó a lehető legkésőbb adja át a lángot a következő futónak.

Ha sorba rendezzük a futókat az indulási hely szerint, akkor a feladat megoldása azonos a benzinkutas feladat megoldásával.



Staféta – Mohó stratégia

```
Staféta(N,E,H,db,B):
  db:=1; B(db):=1
  Ciklus i=2-től N-1-ig
    Ha E(i+1)>E(B(db))+H
       akkor db:=db+1; B(db):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Megjegyzés: Ha E(N)>E(B(db))+K, akkor nincs megoldás.

Staféta – Mohó stratégia

Staféta

Az olimpiai lángot egy kiindulási városból a cél városba kell eljuttatni. A két város távolsága K kilométer. Sok futó jelentkezett, mindegyikről tudjuk, hogy hányadik kilométertől hányadik kilométerig vállalja a futást. A szervezők ki akarják választani a jelentkezők közül a lehető legkevesebb futót, akik végigviszik a lángot.

Staféta – Mohó stratégia

Ha egy futó az $\boldsymbol{x}$ kilométertől az $\boldsymbol{y}$ kilométerig vállalja a futást, akkor minden olyan futó át tudja venni tőle a lángot, aki olyan $\boldsymbol{z}$ kilométertől vállalja a futást, hogy $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{y}$.

A kiindulási városból biztosan indulni kell egy futónak. A megoldás a futók egy olyan $F_1, \ldots, F_k$ részhalmaza, amikor minden futó annak adja át a lángot, aki a lehető legtovább tudja vinni.

Staféta – Mohó stratégia

Az i-edik futó E(i) kilométertől V(i) kilométerig vállalja a láng vitelét.

Rendezzük sorba a futókat az indulási hely szerint!

Az utoljára kiválasztott futó érkezési helyéig válasszuk ki azt a futót, aki a legmesszebb vinné a lángot! Ha a következő futó már később indul, mint az aktuális futó befejezné a futást, akkor a legmesszebb menőnek kell átadnia a lángot.

Staféta – Mohó stratégia

```
Staféta(N,E,V,db,B):
  db:=1; B(db):=1; lm:=1
  Ciklus i=2-től N-1-ig
    Ha V(i)>V(lm) akkor lm:=i
    Ha E(i+1)>V(B(db))
       akkor db:=db+1; B(db):=lm
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Megjegyzés: Ha E(N)>V(B(db)), akkor nincs megoldás.

Pakol – mohó stratégia

Feladat:

Egy raktárban egyetlen hosszú sorban ládák vannak. Minden láda kocka alakú, de méretük különböző lehet. A ládák egymásra rakásával akarnak helyet felszabadítani. A biztonsági előírás szerint több ládát is lehet egymásra rakni, de minden ládát csak nála nagyobbra lehet helyezni. Az i-edik helyen lévő ládát csak akkor lehet rárakni a j-edik helyen lévő torony tetejére, ha az i-edik és j-edik helyek között már nincs láda (j lehet akár kisebb, akár nagyobb, mint i). Minden ládát legfeljebb egyszer lehet mozgatni.

Pakol – mohó stratégia

Megoldás:

Haladjunk balról jobbra, amíg a láda méret növekszik. Ezek biztosan ráterhetők arra, ameddig elértünk, de a tőle jobbra csökkenő sorrendben levők is (hacsak nincs két egyforma a két oldalon).

Példa:

1 3 **5** 4 2 |6 **8** 7 | **6** 5 3 | **4**

Pakol – mohó stratégia

```
Pakol(m):
  m:=0; i:=1; a[n+1]:=0
  Ciklus
    b:=i
    Ciklus amíg i<n és a[i]<a[i+1]
      i:=i+1
    Ciklus vége
    bb:=i-1; j:=i+1; t:=a[i]
    Ciklus amíg b≤bb
      Ha a[j]<t és a[bb]<a[j] akkor t:=a[j]; j:=j+1
            különben t:=a[bb]; bb:=bb-1
    Ciklus vége
    …
```

Pakol – mohó stratégia

```
Pakol(m):
    … {maradtak jobbra}
    Ciklus amíg j≤n és t>a[j]
      t:=a[j]; j:=j+1
    Ciklus vége
    m:=m+1; i:=j
  amíg i≤n
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Terem – Mohó stratégia

Feladat:

Egy rendezvényen N előadást szeretnének tartani. Minden előadó megadta, hogy az előadását mettől meddig tartaná. Add meg, hogy minimum hány termet kell biztosítani az előadásoknak, hogy mindegyiket megtarthassák!

Megoldás:

Rendezzük sorba az előadásokat kezdési idő szerint! Vegyük sorra az előadásokat és tegyük be az első terembe, ahova betehetők! Ha mindegyik terem foglalt, akkor új termet kell kezdenünk!

Megjegyzés: az első terem mohó stratégiával feltöltése hibás eredményt adna!
(1,5), (2,7), (8,10), (6,12)

Terem – Mohó stratégia

```
Rendezvény(N):
  Rendezés(N,K,V,S); db:=0
  Ciklus i=1-től N-ig
    j:=1
    Ciklus amíg j≤db és V(terem(j,tdb(j)))≥K(i)
      j:=j+1
    Ciklus vége
    Ha j≤db akkor tdb(j):=tdb(j)+1
         különben db:=db+1; tdb(j):=1
    terem(j,tdb(j)):=S(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Ha több terembe is tehetjük, melyikbe tegyük?
Azért mindegy, mert a kezdet szerint rendezettek.
Lehetne a termekre prioritási sor?

Kemping - Mohó stratégia

Feladat:

A Napsugár Kemping K faházat üzemeltet az év L napján. Minden vendég ugyanannyi időre, pontosan M napra foglalhat le egy-egy faházat. A kemping a teljes évre előre összegyűjtötte az igényeket. Minden vendég igényként annak a napnak a sorszámát adta meg, amelytől kezdve (M napra) le akar foglalni egy faházat.

A kemping maximálisan hány vendéget fogadhat?

Kemping - Mohó stratégia

Számítsuk ki, hogy mely naptól kezdődően hány igény van:

```
Kiszámít(N):
  Igény:=(0,...,0)
  Ciklus i=1-től N-ig
    Igény(Kezd(i)):=Igény(Kezd(i))+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Ha az igényeket kezdőidő szerint elégítjük ki, akkor kapjuk a maximális vendégszámot.

Kemping - Mohó stratégia

Nézzük végig a napokat és az igényeket, ha lehetséges, osszuk be! Legyen Ut(j) a j. ház utolsó foglalt napja!

```
Beoszt(L):
  Db:=0; Ut:=(0,...,0)
  Ciklus i=1-től L-M+1-ig
    van:=igaz; j:=0
    Ciklus amíg Igény(i)>0 és van
      Szabadház(i,j,van)
      Ha van akkor Db:=Db+1; Ut(j):=i+M-1
                   Igény(i):=Igény(i)-1
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Kemping - Mohó stratégia

```
Szabadház(i,j,van):
  j:=j+1
  Ciklus amíg j≤K és Ut(j)≥i
    j:=j+1
  Ciklus vége
  van:=(j≤K)
Eljárás vége.
```

Mivel egy napra több igény is lehet, ezért nem mindig kell elölről keresni, folytathatjuk továbbkereséssel.

Darabolás - Mohó stratégia

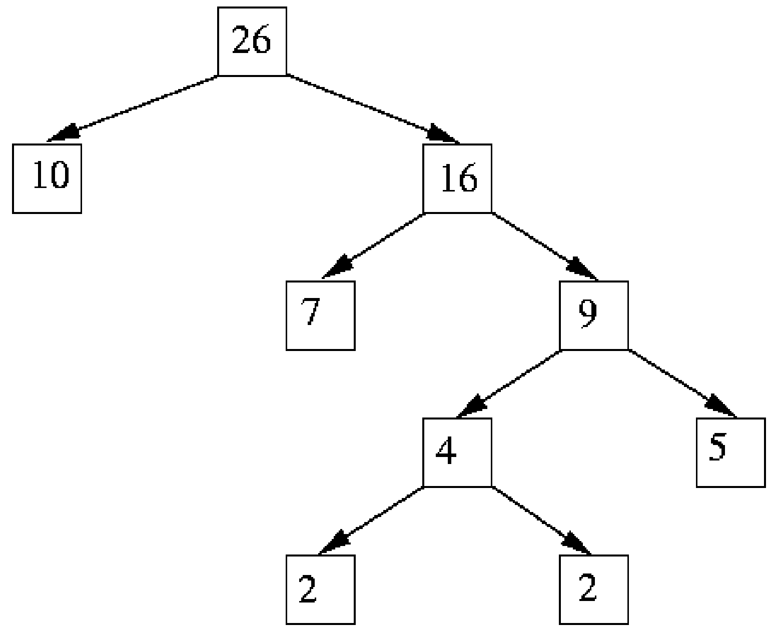
Feladat:

Adott egy fémrúd, amelyet megadott számú és hosszúságú darabokra kell felvágni. A darabok hosszát milliméterben kifejezett értékek adják meg. Olyan vágógéppel kell a feladatot megoldani, amely egyszerre csak egy vágást tud végezni. A vágások tetszőleges sorrendben elvégezhetőek. Egy vágás költsége megegyezik annak a darabnak a hosszával, amit éppen (két darabra) vágunk. A célunk optimalizálni a műveletsor teljes költséget.

Példa: Rúdhossz=26, Darabok=(10,7,2,2,5)

Darabolás - Mohó stratégia

Minden darabolás, így az optimális is leírható egy bináris fával. A fa levelei tartalmazzák a bemenetként kapott darabok hosszait, és minden belső pontja annak a darabnak a hosszát, amelyből vágással a két fiú-pontban lévő darab keletkezett, azaz a két fiának az összegét. Példánk esetén a fa a következőképpen néz ki.



Darabolás - Mohó stratégia

A darabolás összköltsége is kifejezhető a fával, nevezetesen, az összköltség éppen a fa belső (nem levél) pontjaiban található számok összege. Fordítva is igaz, minden ilyen fa egy darabolást ír le. A fa költségén a fa belső pontjaiban lévő számok összegét értjük. Tehát keressük az optimális megoldást, mint egy darabolási fát, tehát azt, amelynek a költsége minimális.
A darabolási fa költsége kifejezhető a következőképpen.
Legyenek d_1, … , d_N a vágandó darabok hosszai és legyen m_i a d_i. darabot tartalmazó levélpont mélysége (a fa gyökerétől vett távolsága) a fában. Ezekkel a jelölésekkel a fa költsége:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i * d_i$$

Darabolás - Mohó stratégia

Az optimális fára teljesül:

- A két legkisebb értéket tartalmazó levélpont mélysége a legnagyobb, és testvérek.
- A két legkisebbet elhagyva optimális megoldást kapunk arra a bemenetre, amiben a két legkisebb helyett az összegük szerepel.

Építsük a darabolási fát úgy, hogy lépésenként a két legkisebb értéket tartalmazó pontot egy új pont két fiává tesszük, és az új pontba a két fiúban lévő érték összegét írjuk.

Darabolás - Mohó stratégia

```
Darabol:
  Költség:=0;
  Ciklus i=1-től N-ig
    PrSorba(i); Fa(i).bal:=0; Fa(i).jobb:=0
  Ciklus vége
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    PrSorból(x); PrSorból(y)
    z:=i+N; D(z):=D(x)+D(y); PrSorba(z)
    Fa(z).bal:=x; Fa(z).jobb:=y;
    Költség:=Költség+D(z)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Hasonló feladat: Huffmann-kód.

Mohó stratégia

A mohó stratégia elemei

1. Fogalmazzuk meg az optimalizációs feladatot úgy, hogy választások sorozatával építjük fel a megoldást!

2. Mohó választási tulajdonság: Mutassuk meg, hogy mindig van olyan megoldása az eredeti feladatnak, amely a mohó választással kezdődik!

3. Optimális részprobléma tulajdonság: Bizonyítsuk be, hogy a mohó választással olyan redukált problémát kapunk, amelynek optimális megoldásához hozzávéve a mohó választást, az eredeti probléma megoldását kapjuk!