Mohó stratégia I.

Mohó stratégia

Feladat:

Egy kábelhálózat különböző csatornáin N filmet játszanak. Ismerjük mindegyik film kezdési és végidejét. Egyszerre csak 1 filmet tudunk nézni. Add meg, hogy maximum hány filmet nézhetünk végig!

Megoldás:

A megoldás egy N elemű halmaz legnagyobb, adott tulajdonsággal rendelkező részhalmazának kiválasztása.

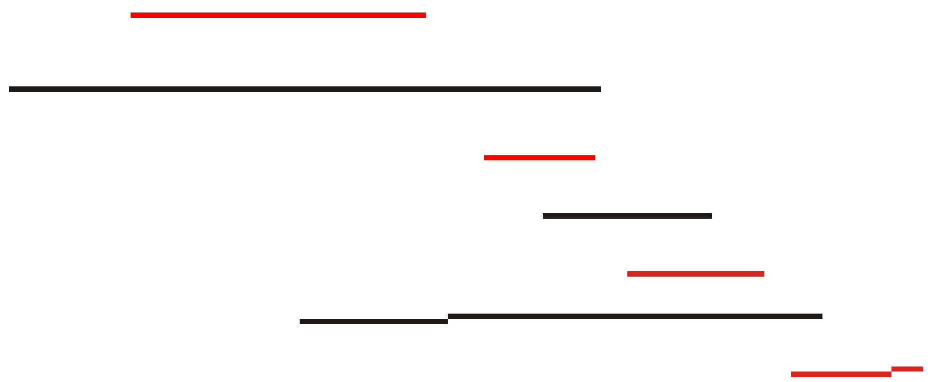
Probléma: egy N elemű halmaznak 2^N részhalmaza van.

Az előadás Horváth Gyula tananyagai felhasználásával készült.

Mohó stratégia

Ötlet:

Rendezzük sorba a filmeket befejezési idejük szerint növekvő sorrendbe!



Ha a leghamarabb befejeződőt választjuk, akkor lesz a legtöbb lehetőségünk a többi közül választani.

Legrövidebb választása nem jó.

Leghamarabb kezdődő elölről haladva nem jó.

Mohó stratégia

Megoldás-1:

Filmek (események) száma: N. Kezdőidők: K_i. Végidők: V_i. Eredeti (rendezés előtti) sorszám: S_i.

```
Kiválogatás(N,K,V,Db,X):
  Rendezés(N,K,V,S)
  Db:=1; X(Db):=S(1); j:=1
  Ciklus i=2-től N-ig
    Ha K(i)≥V(j) akkor Db:=Db+1; X(Db):=S(i)
                       j:=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Mohó stratégia

Megoldás-2:

Filmek (események) száma: N. Kezdőidők: K_i. Végidők: V_i. $Kezd_j$: a j-ben végződő, legkésőbb kezdődő film kezdete, S_j a sorszáma. $1 \le K_i, V_i \le M$.

```
Kiválogatás(N,K,V,Db,X):
  Db:=0; idő:=0; Kezdetek(N,K,V,Kezd,S)
  Ciklus i=1-től M-ig
    Ha S(i)≠0 és idő≤Kezd(i)
       akkor Db:=Db+1; X(Db):=S(i); idő:=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Mohó stratégia

Megoldás-2:

Kezd_j előállítása:

```
Kezdetek(N,K,V,Kezd,S):
  Kezd:=(0,…,0); S:=(0,…,0)
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ha K(i)>Kezd(V(i))
       akkor Kezd(V(i)):=K(i); S(V(i)):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Mohó stratégia

Feladat:

Egy vállalkozó 1 napos munkákat vállal. Ismerjük mindegyik munka határidejét. N napot dolgozik, N igényt kapott. Egy nap csak 1 munkát végezhet. Add meg, hogy maximum hány munkát vállalhat el!

Megoldás:

A megoldás egy N elemű halmaz legnagyobb, adott tulajdonsággal rendelkező részhalmazának kiválasztása.

Probléma: egy N elemű halmaznak 2^N részhalmaza van.

Mohó stratégia

Ötlet:

Tegyünk minden munkát a legutolsó napra, amikor még el-végezhető! Ezzel a lehető legkevesebb másik munka elvállalását akadályozzuk meg.

Megoldás$_1$:

Vegyük sorra a munkákat és mindegyiknek keressük meg a határideje előtt utolsó szabad napot!

Határidők : 6, 3, 3, 1, 5, 3, 6

Beosztásuk:

4.	3.	2.	7.	5.	1.

Mohó stratégia

Megoldás-1:

```
Kiválogatás(N,H,Db,Nap):
  Db:=0; Nap():=(0,…,0)
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ciklus amíg H(i)>0 és Nap(H(i))>0
      H(i):=H(i)-1
    Ciklus vége
    Ha H(i)>0 akkor Db:=Db+1; Nap(H(i)):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Futási idő: $O(N^2)$

Mohó stratégia

Megoldás-2:

Rendezzük sorba a munkákat H(i) szerint! Egy munka elvégezhető a határidejére, ha kevesebbet választottunk ki előtte, mint a határideje. Tegyük a munkát az első szabad napra!

Példa:

Határidők rendezve: 1, 3, 3, 3, 5, 6, 6

Beosztásuk:

1.	2.	3.	5.	6.	7.

Mohó stratégia

Megoldás-2:

```
Kiválogatás(N,H,Db,Nap):
  Rendezés(N,H,S)
  Db:=1; Nap(Db):=S(1)
  Ciklus i=2-től N-ig
    Ha Db<H(i) akkor Db:=Db+1; Nap(Db):=S(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Futási idő: O(N)+rendezésidő

Mohó stratégia

Feladat:

Egy vállalkozó 1 napos munkákat vállal. Ismerjük mindegyik munka határidejét. Egy nap csak 1 munkát végezhet. Az egyes munkákért különböző bért kaphat. Add meg, hogy maximum mennyit kereshet!

Megoldás:

A megoldás egy N elemű halmaz legnagyobb értékű, adott tulajdonsággal rendelkező részhalmazának kiválasztása.

Probléma: egy N elemű halmaznak 2^N részhalmaza van.

Mohó stratégia

Ötlet:

Rendezzük sorba a munkákat az összeg szerint csökkenő sorrendbe! Tegyünk minden munkát a legutolsó napra, amikor még elvégezhető!

Ezzel a lehető legkevesebb másik munka elvállalását akadályozzuk meg és csak nála olcsóbbakat.

Megoldás:

Vegyük sorra a munkákat és mindegyiknek keressük meg a határideje előtt utolsó szabad napot!

Mohó stratégia

Megoldás:

```
Kiválogatás(N,H,Ár,Db,Nap):
  Rendezés(N,H,Ár,S)
  Db:=0; Nap():=(0,…,0)
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ciklus amíg H(i)>0 és Nap(H(i))>0
      H(i):=H(i)-1
    Ciklus vége
    Ha H(i)>0 akkor Db:=Db+1; Nap(H(i)):=S(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Futási idő: $O(N^2)$

Mohó stratégia

Feladat:

Egy rendezvényre N vendég érkezik. Ismerjük mindegyiknek az érkezési és a távozási idejét. A résztvevőket fényképeken szeretnénk megörökíteni. Add meg, hogy minimum hányszor kell fényképet készíteni!

Megoldás:

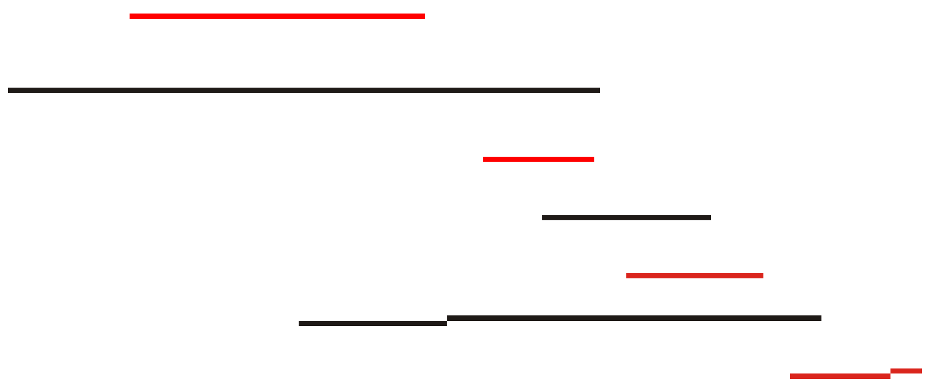
A megoldás a lehetséges időpontok halmaza legkisebb, adott tulajdonsággal rendelkező részhalmazának kiválasztása.

Probléma: egy N elemű halmaznak 2^N részhalmaza van.

Mohó stratégia

Megoldás:

Akkor fényképezzünk, amikor feltétlenül szükséges! Ez azt jelenti, hogy amikor elmenne az első ember, aki még nem volt rajta egy fényképen sem, akkor fényképeznünk kell.



Mohó stratégia

Megoldás:

Emberek (események) száma: N. Érkezési idők: E_i. Távozási idők: T_i.

```
Kiválogatás(N,E,T,Db,X):
  Rendezés(N,E,T)
  Db:=0; X(Db):=T(1); j:=1
  Ciklus i=2-től N-ig
    Ha E(i)≥T(j) akkor Db:=Db+1; X(Db):=T(i)
                       j:=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A megoldás szó szerint azonos a filmes feladat megoldásával!

Mohó stratégia

Feladat:

Egy rendezvényre N vendég érkezik. Ismerjük mindegyiknek az érkezési és a távozási idejét. A résztvevőket fényképeken szeretnénk megörökíteni. A fényképészt K perces időintervallumokra fizetjük. Add meg, hogy minimum hány intervallumra kell fizetni!

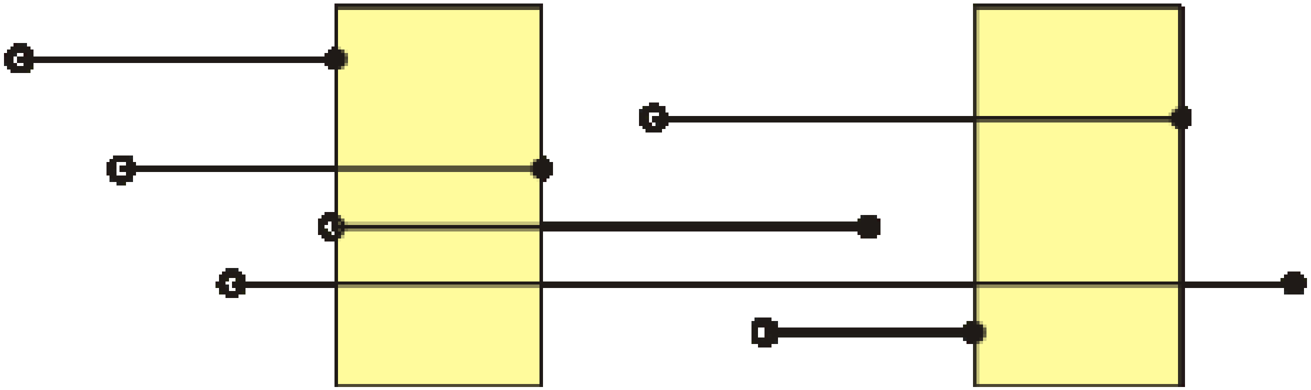
Megoldás:

A megoldás a lehetséges időpontok halmaza legkisebb, adott tulajdonsággal rendelkező részhalmazának kiválasztása.

Mohó stratégia

Megoldás:

Akkor fényképezzünk, amikor feltétlenül szükséges! Ez azt jelenti, hogy amikor elmenne az első ember, aki még nem volt rajta egy fényképen sem, akkor kezdődik egy fényképezési intervallum.



Mohó stratégia

Megoldás:

Emberek (események) száma: N. Érkezési idők: E_i. Távozási idők: T_i. Eredeti (rendezés előtti) sorszám: S_i.

```
Kiválogatás(N,E,T,K,Db,X):
  Rendezés(N,E,T,S)
  Db:=1; X(Db):=S(1); j:=1
  Ciklus i=2-től N-ig
    Ha E(i)≥T(j)+K akkor Db:=Db+1; X(Db):=S(i)
                         j:=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Mohó stratégia

Feladat:

Egy rendezvényre N vendég érkezik. Ismerjük mindegyiknek az érkezési és a távozási idejét, érkezés szerinti sorrendben. A résztvevőket fényképeken szeretnénk megörökíteni. A fényképész minél hamarabb szeretne végezni, ezért amint jelen van legalább K vendég, akkor közülük pontosan K vendéget lefényképez egy csoportképen, azaz csak abban dönthet, hogy adott időpontban kiket fényképez le. Egy időpontban csak egy fényképet tud készíteni, és minden vendég legfeljebb 1 képen szerepelhet. Adjuk meg, hogy maximum hány fényképet készíthet, és kik lesznek a képeken!

Mohó stratégia

Megoldás:

A vendégek sorszámát érkezési időkor egy távozási idő szerinti prioritási sorba tesszük. Az időt léptetjük.

Az aktuális időpont előtt távozókat kivesszük a prioritási sorból – ők nem lesznek rajta fényképen.

Az aktuális időpontban érkezők sorszámát betesszük a prioritási sorba. Ha a prioritási sorban van legalább K elem, akkor őket kiírjuk az eredménybe – ők lesznek fényképen.

Legyen E(N+1) a távozási idők maximuma+1!

Mohó stratégia

Megoldás:

Emberek (események) száma: N. Érkezési idők: E_i. Távozási idők: T_i.

```
Kiválogatás(N,E,T,Db,X):
  Db:=0; i:=1
  Ciklus idő=E(1)-től E(N+1)-ig
    Ciklus amíg a sor nem üres és T(első)<idő
      PrSorból(x)
    Ciklus vége
    ...
```

Mohó stratégia

```
    ...
    Ciklus amíg i≤N és E(i)=idő
      PrSorba(i); i:=i+1
    Ciklus vége
    Ha sorelemszám≥K akkor
      Ciklus j=1-től K-ig
        PrSorból(kep(Db*K+j))
      Ciklus vége
      Db:=Db+1
    Elágazás vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Mohó stratégia

Feladat:

Egy rendezvényre N vendég érkezik. Ismerjük mindegyiknek az érkezési és a távozási idejét. A résztvevőket fényképeken szeretnénk megörökíteni, két feltétellel:

1. Minden képen pontosan két vendég legyen rajta.
2. Minden vendég legfeljebb egy képen szerepelhet.

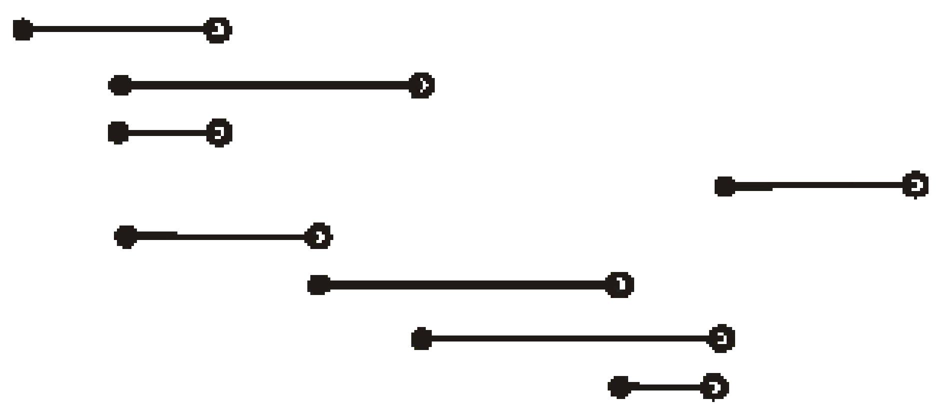
Add meg, hogy maximum hányan lehetnek rajta a képeken!

Többféleképpen fordulhat elő, hogy nem tudunk mindenkit lefényképezni.

Mohó stratégia

Megoldás:

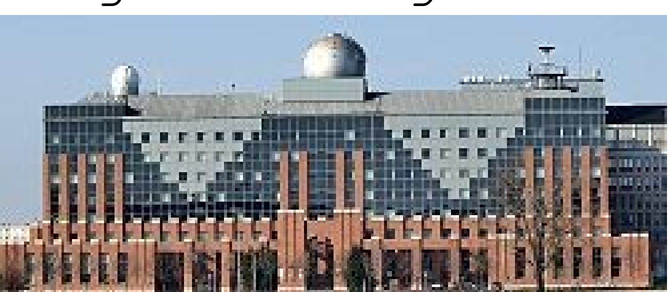
Rendezzük sorba távozási idő szerint az adatainkat. Ha valakinek még nincs párja a fényképezkedéshez, akkor válasszunk olyat párjának, aki ott van és a leghamarabb menne el!



Mohó stratégia

Emberek (események) száma: N. Érkezési idők: E_i. Távozási idők: T_i. Eredeti (rendezés előtti) sorszám: S_i.

```
Kiválogatás(N,E,T,Db,Pár):
  Rendezés(N,E,T,S); Db:=0
  Ciklus i=2-től N-ig
    j:=1
    Ciklus amíg j<i és nem(Pár(j)=0 és E(i)<T(j))
      j:=j+1
    Ciklus vége
    Ha j<i akkor Pár(j):=i; Pár(i):=j; Db:=Db+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```



Mohó stratégia

Feladat:

N-féle pénzjegyünk van, P_1, P_2, …, P_n címletű ($P_i < P_{i+1}$). Add meg, hogy minimálisan melyek felhasználásával fizethető ki az F összeg! Feltehetjük, hogy minden pénzjegyből tetszőleges számú van.

Megoldás:

Vegyünk a legnagyobb címletű pénzjegyből, amennyi szüksé-ges, majd a maradék összeget fizessük ki a nála kisebb pénz-jegyekkel!

Mohó stratégia

```
Pénzváltás(N,P,F,Db):
  i:=N
  Ciklus amíg F>0 és i>0
    db(i):=F div P(i); F:=F mod P(i)
    i:=i-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Probléma: P=(1,3,4), F=6 esetén a megoldás (2,0,1), azaz 3 pénzjeggyel fizetnénk ki a 6 forintot, pedig 6=3+3!

Mohó stratégia

Feladat:

N darab pénzjegyünk van, P_1, P_2, …, P_n címletű ($P_i \leq P_{i+1}$). Add meg, hogy minimálisan melyek felhasználásával fizethető ki az F összeg!

Megoldás:

Vegyünk a legnagyobb címletű pénzjegyből egyet, ha szükséges, majd a maradék összeget fizessük ki a nála kisebb pénzjegyekkel!

Mohó stratégia

```
Pénzváltás(N,P,F,Kell):
  i:=N; Kell():=(hamis,…,hamis)
  Ciklus amíg F>0 és i>0
    Ha F≥P(i) akkor Kell(i):=igaz; F:=F-P(i)
    i:=i-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Probléma: P=(1,1,3,3,4), F=6 esetén a megoldás (i,i,h,h,i), azaz 3 pénzjeggyel fizetnénk ki a 6 forintot, pedig 6=3+3!

P=(1,3,3,4), F=6 esetén nem lesz megoldás, pedig 6=3+3!

Itt a mohó ötlet csak nagyon ritka, véletlenszerű esetekben használható!

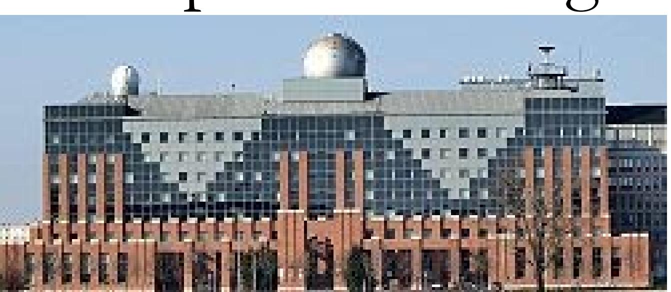
Mohó stratégia

A mohó stratégia elemei

1. Fogalmazzuk meg az optimalizációs feladatot úgy, hogy választások sorozatával építjük fel a megoldást!

2. Mohó választási tulajdonság: Mutassuk meg, hogy mindig van olyan megoldása az eredeti feladatnak, amely a mohó választással kezdődik!

3. Optimális részprobléma tulajdonság: Bizonyítsuk be, hogy a mohó választással olyan redukált problémát kapunk, amelynek optimális megoldásához hozzávéve a mohó választást, az eredeti probléma megoldását kapjuk!



Az előadás Horváth Gyula tananyagai felhasználásával készült.